**Aufgabe 1**

- (a) Seien  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ . Rechnen Sie die drei Vektoren in Polarkoordinaten um, d.h. bestimmen Sie  $r_i \geq 0$  und  $\varphi_i \in [0, 2\pi)$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$ , so dass

$$\mathbf{u}_i = r_i \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i) \\ \sin(\varphi_i) \end{pmatrix} \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

- (b) Zeichnen Sie die folgenden Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$ :

$$M_1 := \left\{ 2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} : \varphi \in [0, 2\pi) \right\},$$

$$M_2 := \left\{ r \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) \end{pmatrix} : r \in [0, 1] \right\},$$

$$M_3 := \left\{ r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} : r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

**Aufgabe 2**

Bestimmen Sie die Menge aller Punkte  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$ , deren Abstand zu  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$  gleich ihrem Abstand zu  $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist. Welches geometrische Objekt entsteht?

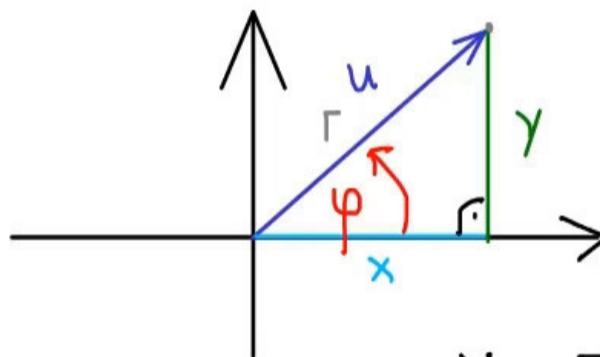
**Aufgabe 3**

Für  $\lambda \in \mathbb{R}$  sei

$$\mathbf{A}_\lambda := \begin{pmatrix} 4 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2 - \lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Determinante von  $\mathbf{A}_\lambda$  in Abhängigkeit von  $\lambda$ . Für welche  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist  $\det(\mathbf{A}_\lambda) = 0$ ?  
(b) Berechnen Sie für jeden dieser Werte  $\lambda$  aus (a) einen Vektor  $\mathbf{x}_\lambda \neq \mathbf{o}$  im Kern von  $\mathbf{A}_\lambda$ .

## Aufgabe 1



Länge:  $r$   
Winkel:  $\varphi$

$$x = r \cos(\varphi)$$

$$y = r \cdot \sin(\varphi)$$

$$r_1 = \|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \underline{1}$$

$$r_2 = \|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{2}}$$

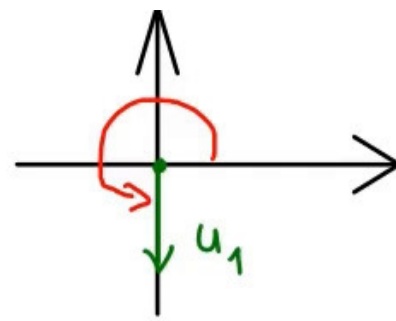
$$r_3 = \|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \underline{2}$$

Winkel  $\varphi$  bestimmen:

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$$

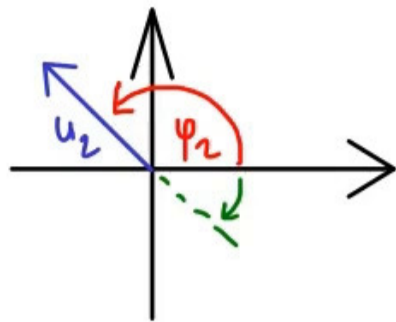
und Wissen des  
Quadranten!

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$



$$\varphi_1 = \frac{3}{2}\pi$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\tan(\varphi_2) = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \varphi_2 = \pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

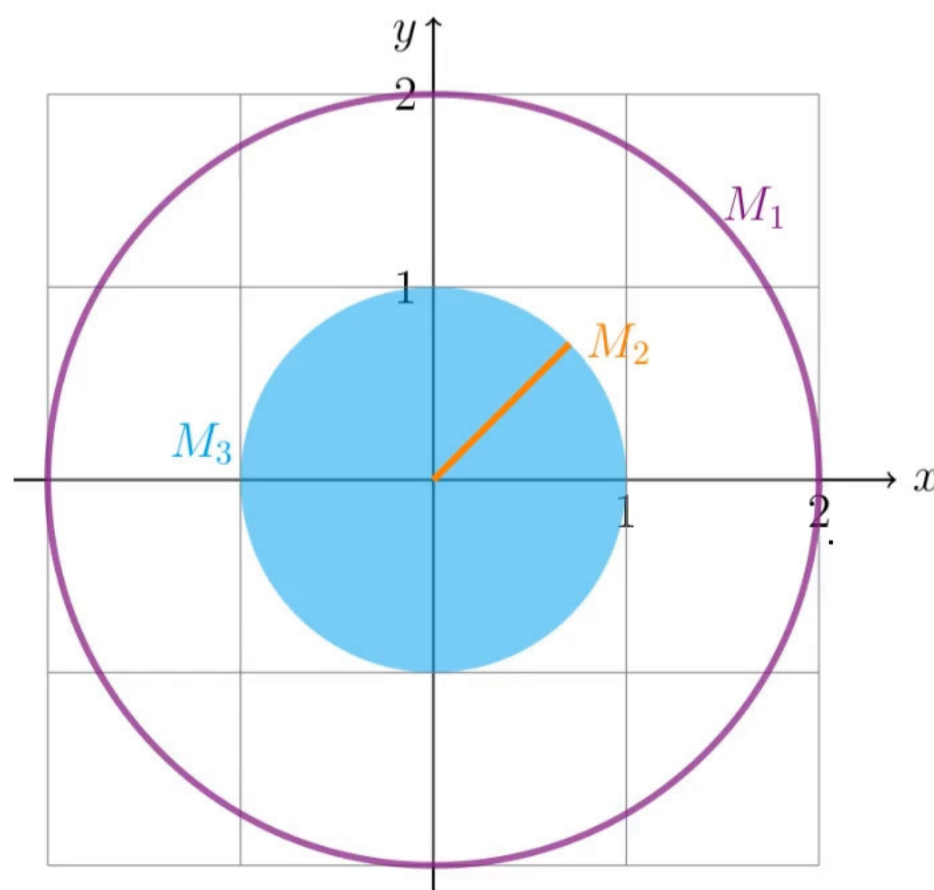
$$u_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

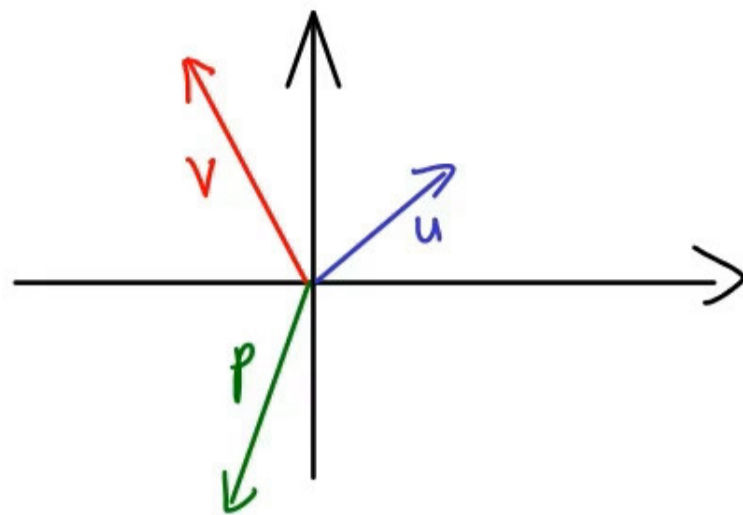
$$\Rightarrow \varphi_3 = \frac{\pi}{6}$$

Radian	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{8}$
Degree	0°	15°	22.5°	30°	45°	60°	67.5°
sin	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$
cot	$\infty$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}-1$
sec	1	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
csc	$\infty$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

(b)



## Aufgabe 2



Wir suchen  $p \in \mathbb{R}^2$  mit  $\|p-v\| = \|p-u\|$   
 $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2$$

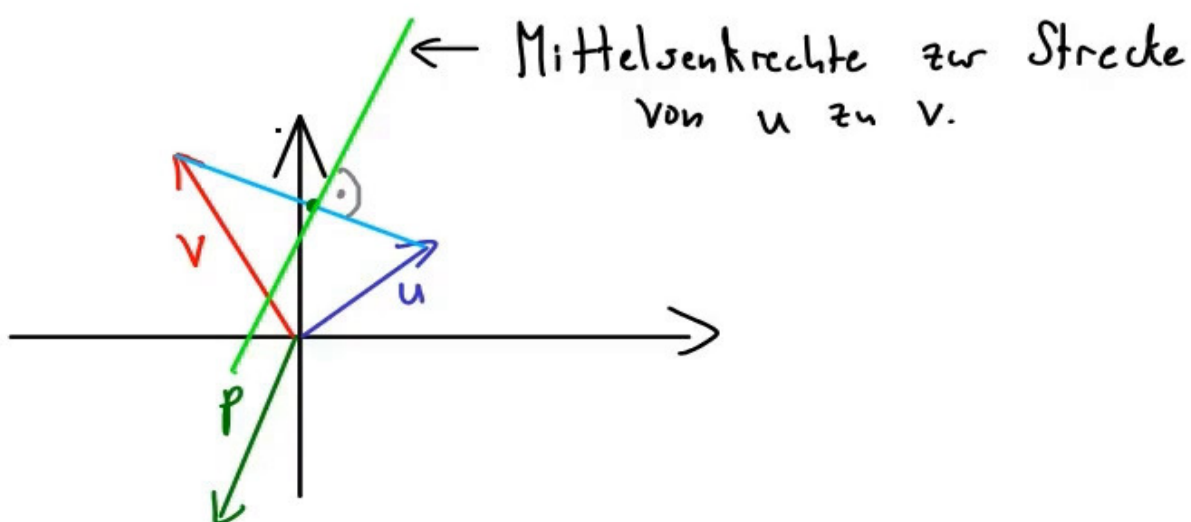
$$\Leftrightarrow \underline{x^2 - 10x + 25} + \underline{y^2 - 2y + 1} = \underline{x^2 - 6x + 9} + \underline{y^2 + 6y + 9}$$

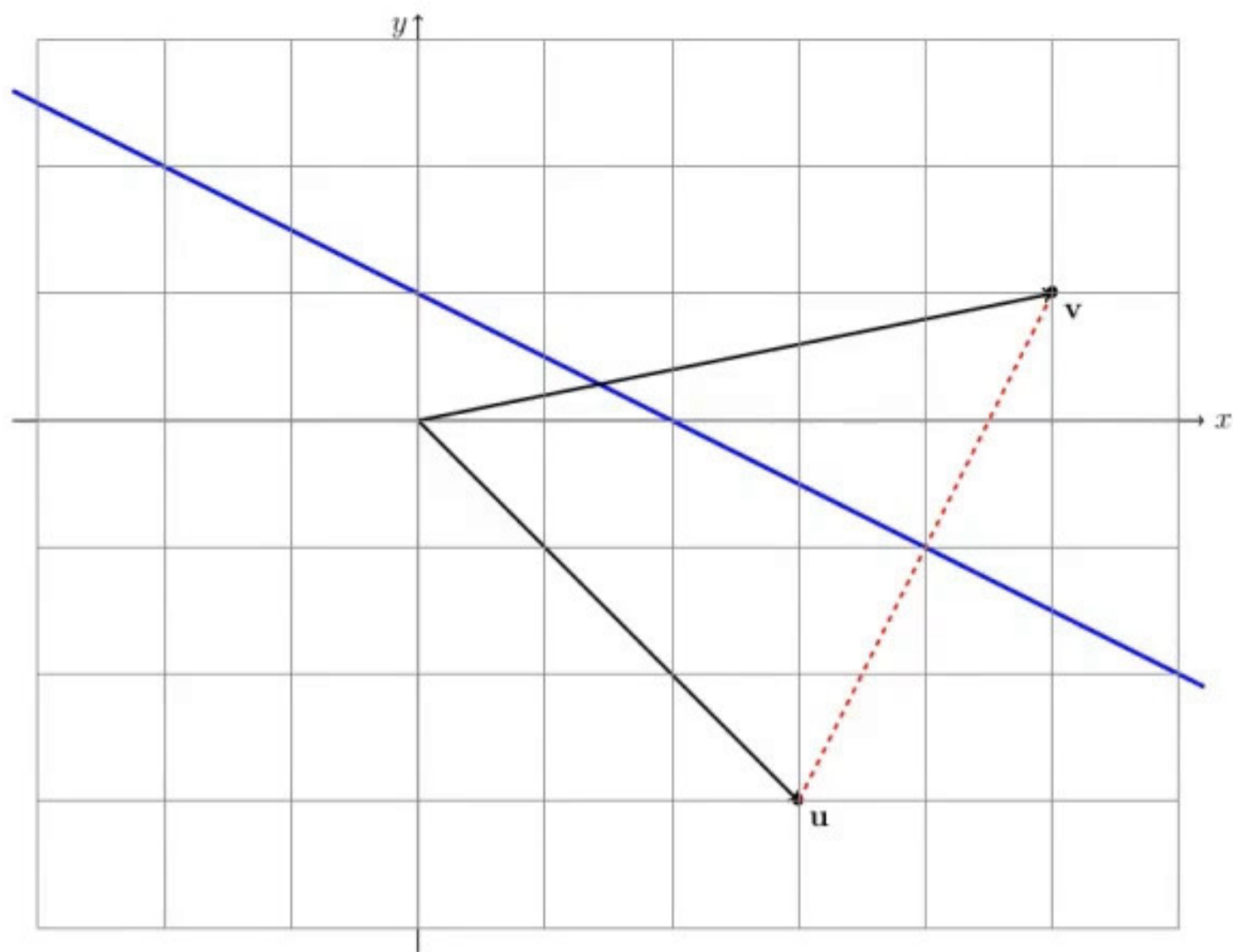
$$\Leftrightarrow 8 = 4x + 8y$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = 2 \quad \leadsto \text{Gerade in } \mathbb{R}^2$$

$$\text{Gesuchte Menge} = \left\{ \begin{pmatrix} 2-2y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$





### Aufgabe 3

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

(a)

$$\begin{aligned} \det(A_\lambda) &= (-2-\lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-2-\lambda) \left[ (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 \right] \\ &= -(2+\lambda) \cdot \left[ \underline{4} - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - \underline{4} \right] \\ &= -(2+\lambda) \cdot \lambda \cdot (-5+\lambda) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \underline{\lambda_1=0}$  ,  $\underline{\lambda_2=-2}$  ,  $\underline{\lambda_3=5}$  Nullstellen!

$$\begin{aligned} \text{Kern}(A_{\lambda_1}) &= \text{Kern} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \text{Kern} \begin{pmatrix} \boxed{4} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Kern}(A_{\lambda_2}) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{Kern}(A_{\lambda_3}) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \text{Span} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$