Aufgabe 1

(a) Seien $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$. Rechnen Sie die drei Vektoren in Polarkoordinaten um, d.h. bestimmen Sie $r_i \geq 0$ und $\varphi_i \in [0, 2\pi)$ für $i \in \{1, 2, 3\}$, so dass

$$\mathbf{u}_i = r_i \begin{pmatrix} \cos(\varphi_i) \\ \sin(\varphi_i) \end{pmatrix} \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\}.$$

(b) Zeichnen Sie die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$:

$$M_1 := \left\{ 2 \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \ : \ \varphi \in [0, 2\pi) \right\},$$
$$M_2 := \left\{ r \begin{pmatrix} \cos(\pi/4) \\ \sin(\pi/4) \end{pmatrix} \ : \ r \in [0, 1] \right\},$$
$$M_3 := \left\{ r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \ : \ r \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Menge aller Punkte $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$, deren Abstand zu $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ gleich ihrem Abstand zu $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist. Welches geometrische Objekt entsteht?

Aufgabe 3

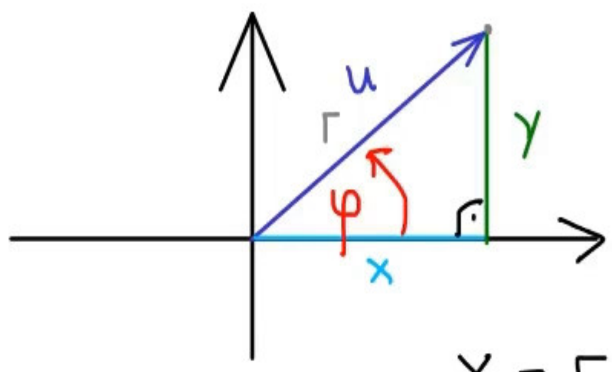
Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$\mathbf{A}_\lambda := \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante von $\mathbf{A}_\lambda$ in Abhängigkeit von λ. Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\det(\mathbf{A}_\lambda) = 0$?

(b) Berechnen Sie für jeden dieser Werte λ aus (a) einen Vektor $\mathbf{x}_\lambda \neq \mathbf{o}$ im Kern von $\mathbf{A}_\lambda$.

Aufgabe 1



Länge: r

Winkel: φ

$x = r\cos(\varphi)$

$y = r \cdot \sin(\varphi)$

$r_1 = \|u_1\| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \underline{1}$

$r_2 = \|u_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \underline{\sqrt{2}}$

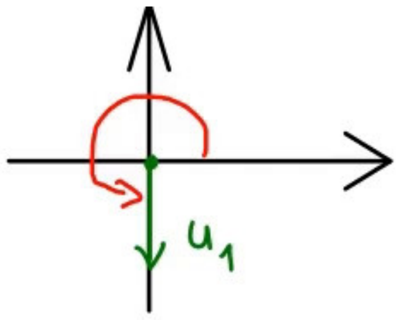
$r_3 = \|u_3\| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \underline{2}$

Winkel φ bestimmen:

$\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$

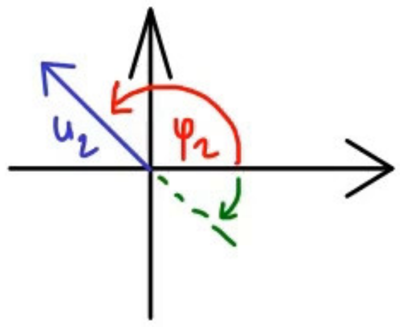
und Wissen des Quadranten!

$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$



$\varphi_1 = \frac{3}{2}\pi$

$u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$



$\tan(\varphi_2) = \frac{1}{-1} = -1$

$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

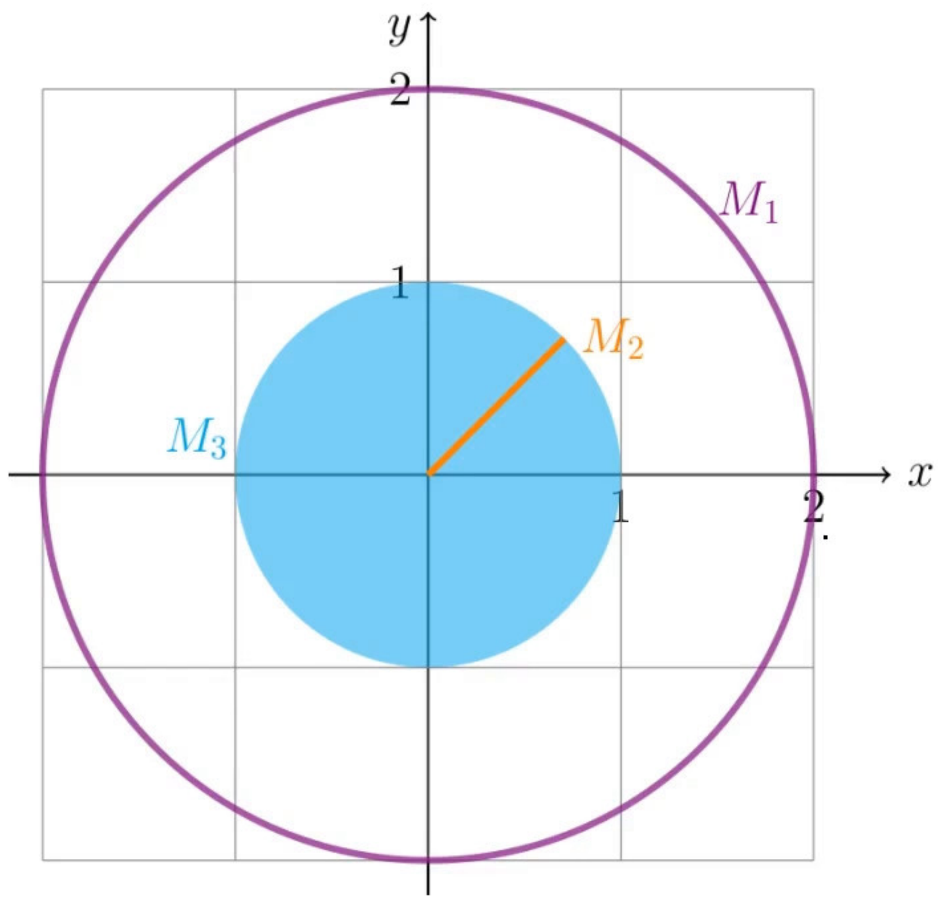
$\Rightarrow \varphi_2 = \pi + \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}\pi$

$u_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

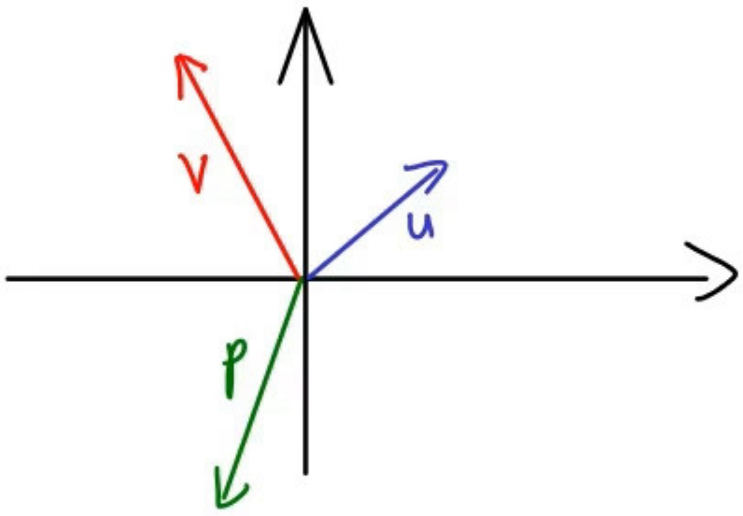
$\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \quad \Rightarrow \varphi_3 = \frac{\pi}{6}$

Radian / Degree	0 / $0°$	$\frac{\pi}{12}$ / $15°$	$\frac{\pi}{8}$ / $22.5°$	$\frac{\pi}{6}$ / $30°$	$\frac{\pi}{4}$ / $45°$	$\frac{\pi}{3}$ / $60°$	$\frac{3\pi}{8}$ / $67.5°$
sin	0	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
cos	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
tan	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{2}-1$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$
cot	∞	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}-1$
sec	1	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
csc	∞	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

(b)



Aufgabe 2



Wir suchen $p \in \mathbb{R}^2$ mit $\|p-v\| = \|p-u\|$
$p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (x-5)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y+3)^2$$

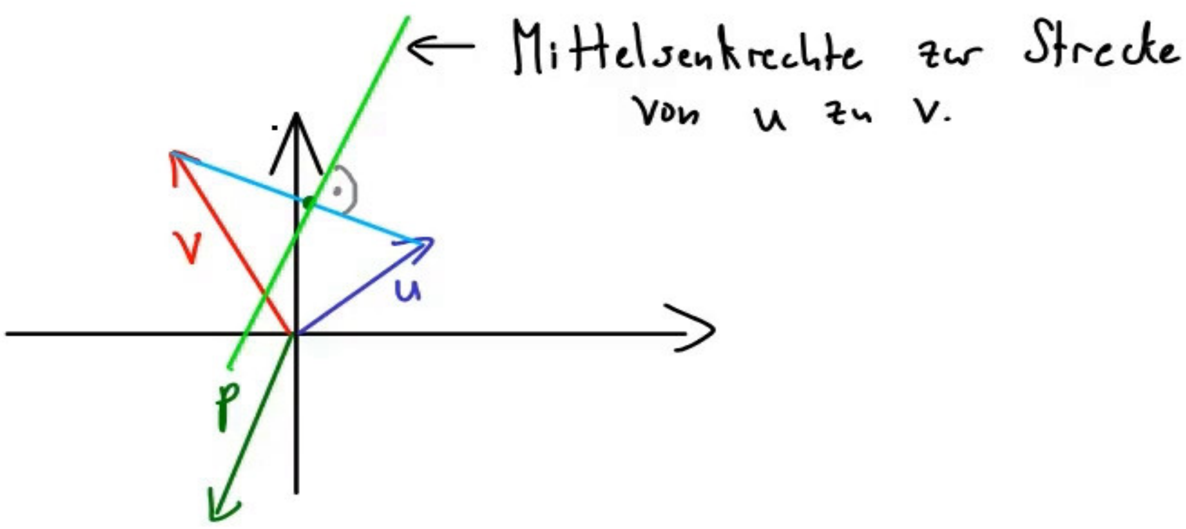
$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 10x + 25 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 6y + 9$$

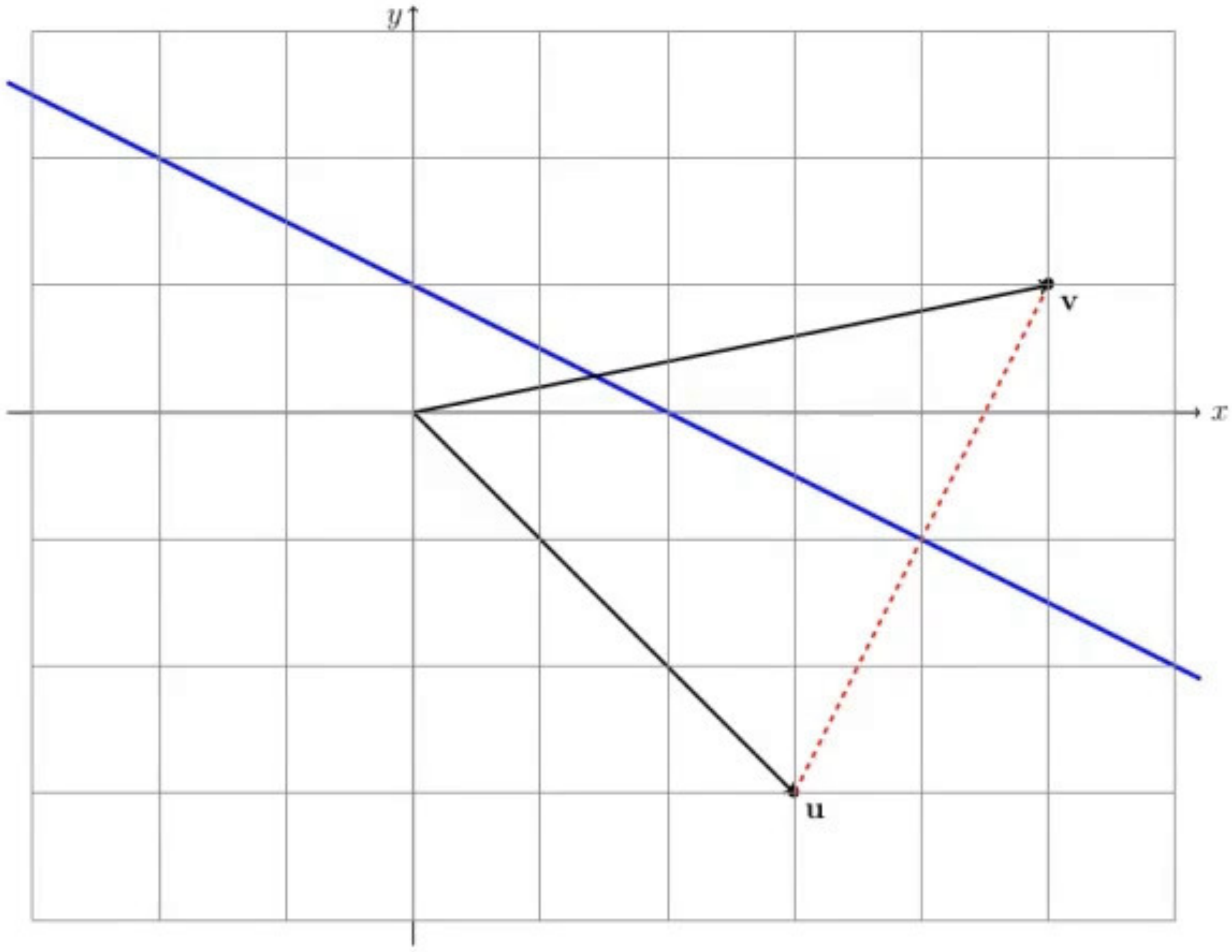
$$\Leftrightarrow \quad 8 = 4x + 8y$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 2y = 2 \qquad \rightsquigarrow \text{Gerade in } \mathbb{R}^2$$

$$\text{Gesuchte Menge} = \left\{ \begin{pmatrix} 2-2y \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}$$





Aufgabe 3

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 4 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

(a)

$$\det(A_\lambda) = (-2-\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)\left[(4-\lambda)(1-\lambda) - 4\right]$$

$$= -(2+\lambda) \cdot \left[4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4\right]$$

$$= -(2+\lambda) \cdot \lambda \cdot (-5+\lambda)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\lambda_1 = 0}\ , \quad \underline{\lambda_2 = -2}\ , \quad \underline{\lambda_3 = 5} \qquad \text{Nullstellen!}$$

$$\operatorname{Kern}(A_{\lambda_1}) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} \boxed{4} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right)$$

$$\operatorname{Kern}(A_{\lambda_2}) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\operatorname{Kern}(A_{\lambda_3}) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & 0 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$