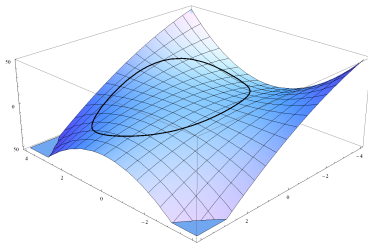


Höhere Mathematik II

Extrema mit Nebenbedingungen

Julian Großmann
Probelehrveranstaltung



21. Juni 2022

Heutiges Thema

Lokale Minima
und Maxima

Hessematrix

Satz über
implizite Funktionen

Extrema
mit
Nebenbedingungen

Satz (Hinreichendes Kriterium)

Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ C^2 -Funktion gilt:

$\text{grad}(f)(\tilde{x}) = 0$ u. $\mathbf{H}_f(\tilde{x})$ pos. definit

$\Rightarrow$

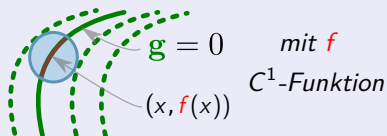
f hat lok. Minimum bei $\tilde{x}$

Satz (über implizite Funktionen)

Für $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -Funktion
mit $g(\tilde{x}, \tilde{y}) = 0$ gilt:

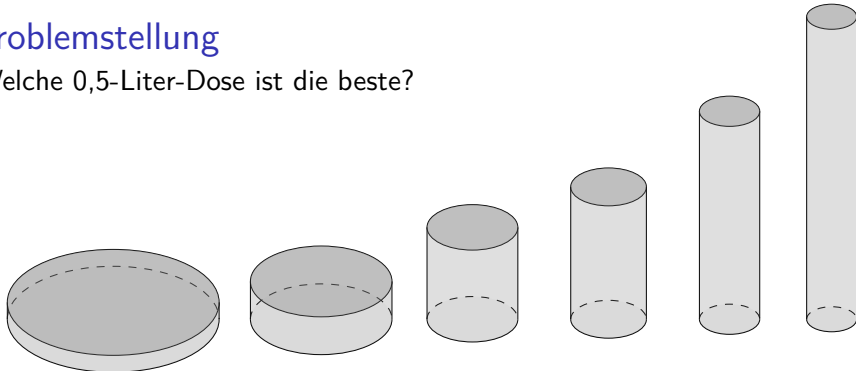
$\frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{x}, \tilde{y})$ invertierbar

$\Rightarrow g(x, f(x)) = 0$ lokal um $\tilde{x}$



Problemstellung

Welche 0,5-Liter-Dose ist die beste?



Welcher Zylinder braucht das wenigste Material?

Suche Minimum unter einer Nebenbedingung:

$$O(r, h) = \text{Fläche}(\text{top}) + \text{Fläche}(\text{bottom}) + \text{Fläche}(\text{side}) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

$$V(r, h) = \pi r^2 h = \frac{1}{2}$$

Allgemeines Problem

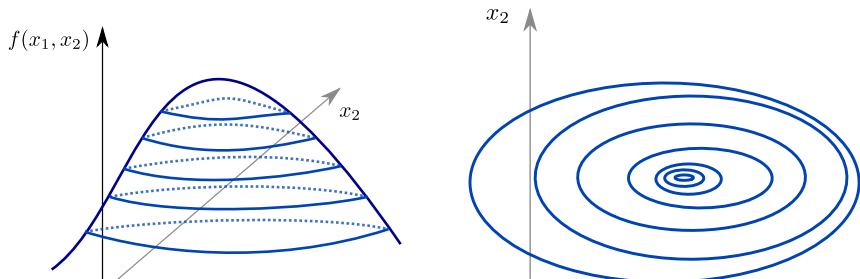
Lokale Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung

$$g(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

mit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Bedeutet: Lokale Extrema der Funktion $f|_G : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid g(\mathbf{x}) = 0\}.$$



Erstes Ergebnis

Theorem (Methode von Lagrange)

Für $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 -Funktionen und $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}$ gilt:

f hat lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g = 0$ bei $\tilde{\mathbf{x}}$,

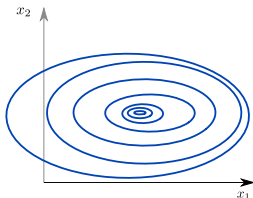
+

$$\text{grad}(g)(\tilde{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$$

$\implies$

Es gibt $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\text{grad}(f)(\tilde{\mathbf{x}}) = \lambda \text{grad}(g)(\tilde{\mathbf{x}})$.

Beweisskizze



Ausführliches Video:
jp-g.de/a345

Beispiel

Suche lokale Extrema von

$$f(x_1, x_2) = 2\pi(x_1^2 + x_1x_2) \text{ mit Nebenbedingung } g(x_1, x_2) = \pi x_1^2 x_2 - \frac{1}{2} = 0.$$

Allgemeines Ergebnis

Theorem (Methode von Lagrange)

Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ C^1 -Funktionen schreiben wir:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Es gilt:

f hat lokales Extremum unter den Nebenbedingungen $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ bei $\tilde{\mathbf{x}}$

+

$$\text{rang}(J_{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}})) = m$$

$\implies$

$$\text{Es gibt } \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \text{ mit } \mathbf{grad}(f)(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \mathbf{grad}(g_j)(\tilde{\mathbf{x}}).$$

Umformulierung

Für C^1 -Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für $j \in \{1, \dots, m\}$ definieren wir die *Lagrange-Funktion*:

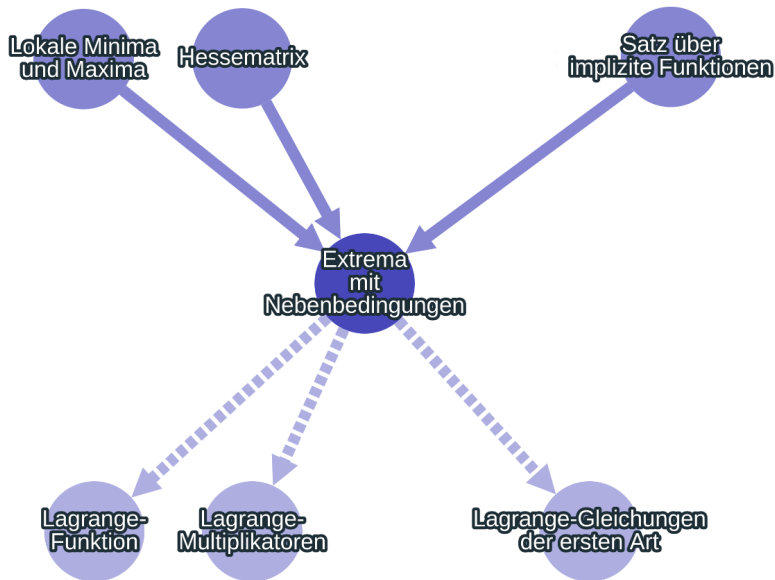
$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) := f(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\lambda} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$$

Satz

$$\text{grad}(L)(\tilde{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\mathbf{g}(\tilde{\mathbf{x}}) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \text{grad}(f)(\tilde{\mathbf{x}}) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \text{grad}(g_j)(\tilde{\mathbf{x}}).$$



Aufgabe

Wir suchen die Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3,$$

auf dem Schnitt des Zylinders $Z := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = 2\}$ mit der Ebene $E := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 1\}$.

- (a) Formulieren Sie dies als Nebenbedingungen $\mathbf{g} = 0$.
- (b) Skizzieren Sie die Menge $G := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0\}$ in $\mathbb{R}^3$.
- (c) Zeigen Sie, dass für alle Punkte $\mathbf{x} \in G$, die Regularitätsbedingung $\text{rang}(J_{\mathbf{g}}(\tilde{\mathbf{x}})) = 2$ erfüllt ist.
- (d) Stellen Sie die Lagrange-Funktion L für das Extremwertproblem auf.
- (e) Bestimmen Sie $\mathbf{grad}(L) : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}$.
- (f) Bestimmen Sie alle Stellen $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$, die die notwendige Bedingung für Extremwerte erfüllen.
- (g) Können Sie entscheiden, ob an diesen Stellen jeweils ein Maximum oder Minimum vorliegt?