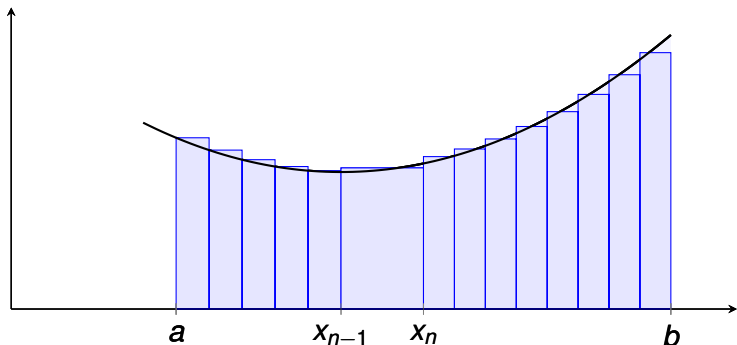


9 Riemann-Integral für Funktionen einer Variablen

Integral = (orientierte) Fläche zwischen Funktion

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und der x -Achse

$\approx \sum_n (x_n - x_{n-1}) f(\xi_n)$ mit Zwischenpunkten $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$

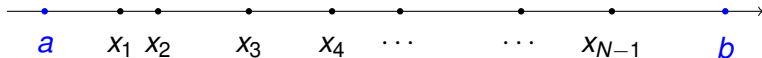


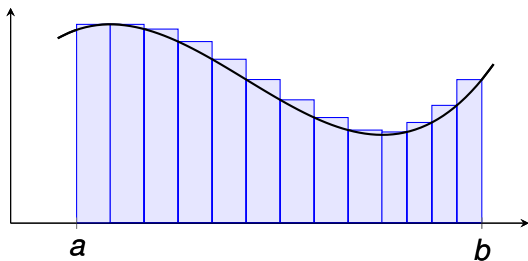
Alternative: Lebesgue-Integral durch Zerlegung der y -Achse

Definition 9.1

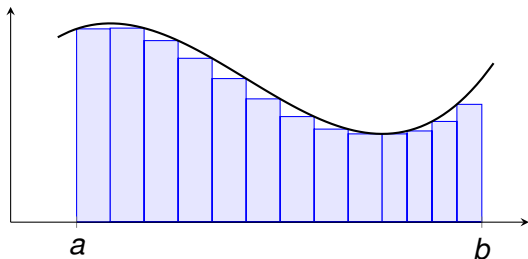
- (i) Zerlegung Z des endlichen Intervalls $[a, b]$ ist gegeben durch Punkte $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ mit endlichem $N \in \mathbb{N}$
- (ii) Zerlegung Z' feiner als Zerlegung Z (Schreibweise $Z \leq Z'$)
 $\iff$ jeder Punkt in Z ist auch in Z'
- (iii) Gegeben Zerlegungen Z und Z' , entsteht Verfeinerung $Z \cup Z'$ durch deren Überlagerung
- (iv) $\mathcal{F}(Z) = \max_{n=1, \dots, N} \Delta x_n$ mit $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ ist Feinheit von Z

$$Z = \{x_1, \dots, x_{N-1}\}$$





Obersumme $O_Z(f)$



Untersumme $U_Z(f)$

Definition 9.2 (Riemann Integral)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Funktion und Z Zerlegung von $[a, b]$

(i) Untersumme $U_Z(f)$ und Obersumme $O_Z(f)$ sind

$$U_Z(f) = \sum_{n=1}^N \Delta x_n \cdot m_n, \quad m_n = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{n-1}, x_n]\}$$

$$O_Z(f) = \sum_{n=1}^N \Delta x_n \cdot M_n, \quad M_n = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{n-1}, x_n]\}$$

(ii) Unteres und oberes Riemann-Integral:

$$U(f) = \sup_Z U_Z(f), \quad O(f) = \inf_Z O_Z(f)$$

(iii) f Riemann-integrierbar $\iff U(f) = O(f) \in \mathbb{R}$. Dann

$$\int_a^b dx f(x) = U(f) = O(f) = \int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} dx f(x)$$

Bemerkung 9.3

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ unbeschränkt $\implies O_Z(f) = \infty$ oder $U_Z(f) = -\infty \quad \forall Z$
Riemann-integrierbare Funktionen sind also immer beschränkt

Lemma 9.4

Z, Z' Zerlegungen von $[a, b] \implies U_Z(f) \leq O_{Z'}(f)$.

Somit $U(f) \leq O(f)$

Beweis: Behauptung klar für $Z = Z'$

Sei zunächst $Z \leq Z'$ und z.B. $x_{n-1} = x'_{j-1} < x'_j < x'_{j+1} = x_n$. Dann

$$\begin{aligned} \Delta x_n m_n &= \Delta x'_j m_n + \Delta x'_{j+1} m_n \\ &\leq \Delta x'_j m'_j + \Delta x'_{j+1} m'_{j+1} \quad (\text{weil inf über kleineres Intervall}) \end{aligned}$$


Somit $U_Z(f) \leq U_{Z'}(f)$. Analog: $O_Z(f) \geq O_{Z'}(f)$

Jetzt $Z \leq Z \cup Z'$ und $Z' \leq Z \cup Z'$, so dass

$$U_Z(f) \leq U_{Z \cup Z'}(f) \leq O_{Z \cup Z'}(f) \leq O_{Z'}(f)$$



Satz 9.5 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)

f integrierbar $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists$ Zerlegung Z mit $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$

Beweis: " $\implies$ " $O(f) = U(f) \implies Z, Z'$ mit $O_Z(f) - U_{Z'}(f) < \varepsilon$
 $\implies O_{Z \cup Z'}(f) - U_{Z \cup Z'}(f) \leq O_Z(f) - U_{Z'}(f) < \varepsilon$ (Beweis Lemma 9.4)

" $\impliedby$ " $0 \leq O(f) - U(f) \leq O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$ für geeignetes Z □

Satz 9.6 (Verschärftes Riemannkriterium)

f integrierbar

$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit $O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon \forall Z$ mit $\mathcal{F}(Z) < \delta$

Beweis: (Argument f in O_Z, U_Z unterdrückt) " $\Leftarrow$ " klar nach Satz 9.5

" $\Rightarrow$ " Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 9.5 $\exists$ Zerlegung Z' mit $O_{Z'} - U_{Z'} < \frac{\varepsilon}{3}$

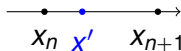
Sei Z beliebige Zerlegung.

Behauptung: $\exists$ von Z unabhängige Konstante $C = C(f, Z')$ mit

$$O_Z - O_{Z \cup Z'} \leq C\mathcal{F}(Z), \quad U_{Z \cup Z'} - U_Z \leq C\mathcal{F}(Z)$$

Begründung: Seien x_n, x_{n+1} in Z .

Betrachte zugehörigen Beitrag B_n zu $O_Z - O_{Z \cup Z'}$.



Falls kein Punkt von Z' in $[x_n, x_{n+1}]$, ist $B_n = 0$.

Falls ein Punkt x' von Z' in $[x_n, x_{n+1}]$, gilt:

$$\begin{aligned} B_n &= (x_{n+1} - x_n) \sup_{[x_n, x_{n+1}]} f - (x_{n+1} - x') \sup_{[x', x_{n+1}]} f - (x' - x_n) \sup_{[x_n, x']} f \\ &= (x_{n+1} - x') \left(\sup_{[x_n, x_{n+1}]} f - \sup_{[x', x_{n+1}]} f \right) + (x' - x_n) \left(\sup_{[x_n, x_{n+1}]} f - \sup_{[x_n, x']} f \right) \\ &\leq \mathcal{F}(Z) \left(\sup_{[a, b]} f - \inf_{[a, b]} f \right) \cdot 2 \end{aligned}$$

Falls k Punkte von Z' in $[x_n, x_{n+1}]$, gilt analog:

$$B_n \leq \mathcal{F}(Z) \left(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f \right) (k+1)$$

Summieren über Beitrag zeigt $O_Z - O_{Z \cup Z'} \leq C\mathcal{F}(Z)$. Zweite Behauptung analog.

Somit

$$\begin{aligned} O_Z - U_Z &\leq |O_Z - O_{Z \cup Z'}| + |O_{Z \cup Z'} - U_{Z \cup Z'}| + |U_{Z \cup Z'} - U_Z| \\ &\leq C\mathcal{F}(Z) + \frac{\varepsilon}{3} + C\mathcal{F}(Z) < \varepsilon \end{aligned}$$

für $\mathcal{F}(Z) < \delta = \frac{\varepsilon}{3C}$.



Definition 9.7

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt.

Z Zerlegung von $[a, b]$ mit Punkten $x_0 < x_1 < \dots < x_N$

Sei $\xi_n \in [x_{n-1}, x_n]$ Zwischenpunkte und setze $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N)$

Die zugehörige Riemannsche Zwischensumme ist definiert als

$$S_{Z,\xi}(f) = \sum_{n=1}^N \Delta x_n \cdot f(\xi_n)$$

Satz 9.8 (Zwischensummenbeschreibung des Integrals)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Dann: $\int_a^b dx f(x) = I$

$$\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit}$$

$$|S_{Z,\xi}(f) - I| < \varepsilon \quad \forall Z \text{ mit } \mathcal{F}(Z) < \delta \text{ und } \forall \xi$$

Beweis " $\implies$ " Es gilt

$$U_Z - O_Z \leq U_Z - I \leq S_{Z,\xi} - I \leq O_Z - I \leq O_Z - U_Z$$

Somit $|S_{Z,\xi} - I| \leq O_Z - U_Z < \varepsilon \quad \forall \mathcal{F}(Z) < \delta$ (nach Satz 9.6)

" $\impliedby$ " Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta > 0$ so, dass

$$|S_{Z,\xi} - I| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } \mathcal{F}(Z) < \delta \quad \forall \text{ Zwischenpunkte } \xi$$

Bestimme ξ und ξ' so, dass

$$|S_{Z,\xi} - O_Z| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad |S_{Z,\xi'} - U_Z| \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

Dann

$$O_Z - U_Z \leq |O_Z - S_{Z,\xi}| + |S_{Z,\xi} - I| + |S_{Z,\xi'} - I| + |S_{Z,\xi'} - U_Z| < \varepsilon$$

Schließe mit Satz 9.5 oder 9.6



Korollar 9.9

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar

$$\implies \int_a^b dx f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^N f\left(a + \frac{n-t}{N}(b-a)\right) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Beweis: Spezielle Zwischensumme mit $\xi_n = a + \frac{n-t}{N}(b-a)$. □

Satz 9.10

Jede stetige Funktion ist (Riemann-) integrierbar

Beweis: Da $[a, b]$ kompakt, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig (Ana 1),

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall |x - x'| < \delta$

Für Zerlegung Z mit $\mathcal{F}(Z) < \delta$ gilt also

$$O_Z(f) - U_Z(f) < \sum_{n=1}^N \Delta x_n \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

Schließe mit Satz 9.6 □

Beispiel 9.11 (Berechnung eines Integrals)

$$\begin{aligned}\int_a^b dx x^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^N \left(a + \frac{n}{N}(b-a)\right)^2 \\&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{n=1}^N \left(a^2 + n^2 \frac{(b-a)^2}{N^2} + \frac{2n}{N}(b-a)a\right) \\&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \left(Na^2 + \frac{2(b-a)a}{N} \frac{N(N+1)}{2} + \frac{(b-a)^2}{N^2} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \right) \\&= (b-a) \left(a^2 + (b-a)a + \frac{1}{3}(b-a)^2 \right) \\&= (b-a) \frac{1}{3} (b^2 + ab + a^2) = \frac{1}{3} (b^3 - a^3)\end{aligned}$$

Länglich. Bessere Alternative später (Fundamentalsatz).

Definition 9.12

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (Riemann'sche) Treppenfunktion

$\iff \exists$ Zerlegung Z von $[a, b]$ mit f konstant auf $(x_{n-1}, x_n) \forall n$

Es gibt unstetige, integrierbare Funktionen:

Satz 9.13

Treppenfunktionen sind integrierbar

Begründung: $O_Z(f) - U_Z(f)$ beliebig klein, denn Beitrag der endlich vielen Sprungstellen wird klein □

Beispiel 9.14 (Eine nicht Riemann-integrierbare Funktion)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

Dann $\forall$ Zerlegungen Z gilt $O_Z(f) = 1 > U_Z(f) = 0$

Aber: f Lebesgue-integrierbar und $\int_0^1 dx f(x) = 0$, weil $\mathbb{Q}$ "nur dünn", da abzählbar

Satz 9.15

- (i) *Monotone Funktionen sind integrierbar*
- (ii) *f, g integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \implies f + \lambda g$ und $f \cdot g$ integrierbar
(d.h. integrierbare Funktionen bilden eine Algebra).*
- (iii) *f integrierbar $\implies |f|$ integrierbar*
- (iv) *f integrierbar, $h \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \implies h \circ f$ integrierbar*

Beweis: (i) Sei f monoton steigend. Dann

$$\begin{aligned} O_Z(f) - U_Z(f) &= \sum_{n=1}^N \Delta x_n \underbrace{(f(x_{n+1}) - f(x_n))}_{\geq 0} \\ &\leq \mathcal{F}(Z) \sum_{n=1}^N (f(x_{n+1}) - f(x_n)) \\ &= \mathcal{F}(Z)(f(b) - f(a)) < \varepsilon \end{aligned}$$

Letzteres falls $\mathcal{F}(Z) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} = \delta$.

(ii) Sei $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} O_Z(f + \lambda g) &= \sum_{n=1}^N \Delta x_n \sup_{[x_{n-1}, x_n]} (f + \lambda g) \\ &\leq \sum_{n=1}^N \Delta x_n \left(\sup_{[x_{n-1}, x_n]} f + \lambda \sup_{[x_{n-1}, x_n]} g \right) \\ &= O_Z(f) + \lambda O_Z(g) \end{aligned}$$

Analog $U_Z(f + \lambda g) \geq U_Z(f) + \lambda U_Z(g)$

Somit nach Satz 9.5

$$O_Z(f + \lambda g) - U_Z(f + \lambda g) \leq (O_Z(f) - U_Z(f)) + \lambda (O_Z(g) - U_Z(g)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\lambda \varepsilon}{2}$$

Also ist $f + \lambda g$ integrierbar

Fall $\lambda < 0$ analog, als Übung.

Hilfsmittel lokale Variation $v_n(f) = \sup_{x, x' \in [x_{n-1}, x_n]} |f(x) - f(x')|$. Dann:

$$O_Z(f) - U_Z(f) = \sum_{n=1}^N \Delta x_n \sup_{x, x' \in [x_{n-1}, x_n]} |f(x) - f(x')| = \sum_{n=1}^N \Delta x_n v_n(f)$$

Da

$$f(x)g(x) - f(x')g(x') = (f(x) - f(x'))g(x) + f(x')(g(x) - g(x'))$$

gilt

$$v_n(fg) \leq \|g\|_{\infty} v_n(f) + \|f\|_{\infty} v_n(g)$$

wobei

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$$

Somit

$$O_Z(fg) - U_Z(fg) \leq \|g\|_{\infty} (O_Z(f) - U_Z(f)) + \|f\|_{\infty} (O_Z(g) - U_Z(g))$$

und fg integrierbar nach obigem Argument.

(iii) Variation erfüllt $v_n(|f|) \leq v_n(f)$. Dann wie in (ii).

(iv) h gleichmäßig stetig auf Kompaktum $[-\|f\|_\infty, \|f\|_\infty]$ (Analysis 1),

d.h. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ mit $|h(y) - h(y')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall |y - y'| < \delta$

Da f integrierbar, wähle Z mit $O_Z(f) - U_Z(f) < \frac{\varepsilon \cdot \delta}{4\|h\|_\infty}$

Seien $\sum'_n$ und $\sum''_n$ Summen über Terme mit $v_n(f) < \delta$ bzw. $v_n(f) \geq \delta$

Dann $O_Z(f) - U_Z(f) \geq \delta \sum''_n \Delta x_n$, und somit $\sum''_n \Delta x_n < \frac{\varepsilon}{4\|h\|_\infty}$. Also

$$\begin{aligned} O_Z(h \circ f) - U_Z(h \circ f) &= \sum'_{n=1}^N \Delta x_n v_n(h \circ f) + \sum''_{n=1}^N \Delta x_n v_n(h \circ f) \\ &\leq \sum'_{n=1}^N \Delta x_n \frac{\varepsilon}{2(b-a)} + \sum''_{n=1}^N \Delta x_n 2\|h\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$



Jetzt: Aussagen für Ober- und Untersummen gelten für Integral:

Satz 9.16 (Rechenregeln fürs Integral)

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, $c \in (a, b)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$

(i) *Linearität des Integrals:*

$$\int_a^b dx (f(x) + \lambda g(x)) = \left(\int_a^b dx f(x) \right) + \lambda \left(\int_a^b dx g(x) \right)$$

(ii) *Intervalladditivität:*

$$\int_a^b dx f(x) = \int_a^c dx f(x) + \int_c^b dx f(x)$$

(iii) *Monotonie:*

$$f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b] \quad \implies \quad \int_a^b dx f(x) \leq \int_a^b dx g(x)$$

(iv) *Standardabschätzung:*

$$\left| \int_a^b dx f(x) \right| \leq \int_a^b dx |f(x)| \leq (b - a) \|f\|_{\infty}$$

Satz 9.17

$(f_n)_{n \geq 1}$ Folge integrierbare Funktionen auf $[a, b]$

Folge konvergiere gleichmäßig gegen f (d.h. $\|f - f_n\|_\infty \rightarrow 0$)

$\implies f$ integrierbar und $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b dx f_n(x) = \int_a^b dx f(x)$

Entsprechendes gilt für gleichmäßig konvergente Reihen: $\sum_n \int = \int \sum_n$

Beweis:

$$\begin{aligned} O_Z(f) - U_Z(f) &= (O_Z(f) - O_Z(f_n)) - (U_Z(f) - U_Z(f_n)) + O_Z(f_n) - U_Z(f_n) \\ &\leq O_Z(f - f_n) - U_Z(f - f_n) + O_Z(f_n) - U_Z(f_n) \text{ (wie oben)} \\ &\leq 2(b-a)\|f - f_n\|_\infty + O_Z(f_n) - U_Z(f_n) \end{aligned}$$

Wähle n mit $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, dann Z mit $O_Z(f_n) - U_Z(f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$

Nach Riemannkriterium ist f also integrierbar. Mit Rechenregeln

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b dx f(x) - \int_a^b dx f_n(x) \right| &= \left| \int_a^b dx (f(x) - f_n(x)) \right| \\ &\leq (b-a)\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

